Une autre vue de l'Analyse Non Standard

William C. Davidon
traduit de l'anglais par C. Obrecht

24 novembre 1999

... il y a de bonnes raisons de penser que l'analyse non standard, dans l'une ou l'autre de ses versions, sera l'analyse du futur. *Kurt Gödel* [1973]

Introduction

En 1961, Abraham Robinson a fondé une nouvelle manière d'étudier les limites, la continuité et d'autres aspects de l'analyse sur le modèle non standard de l'arithmétique de Peano créé par Thoralf Skolem [1934], ajoutant une solide généralisation des infinitésimaux de Leibniz aux méthodes du XIX$^{\text{e}}$ siècle considérées de nos jours comme standards. Des généralisations de l'analyse non standard de Robinson ont depuis été utilisées dans divers domaines tels l'analyse fonctionnelle, la théorie des nombres, les probabilités, les systèmes dynamiques et l'économie mathématique [1988]. L'analyse non standard fournit des outils puissants et nouveaux, pas seulement pour démontrer ou réfuter des conjectures et simplifier des démonstrations classiques, mais aussi pour donner un sens précis à de nombreuses notions informelles - comme celles de grands nombres entiers ou de points voisins - utiles dans la construction de modèles mathématiques pour divers phénomènes ainsi que dans l'enseignement du calcul infinitésimal, de l'analyse et de la topologie. Afin d'être plus accessible aux étudiants et aux non-spécialistes, cet article ne présuppose aucune connaissance des concepts issus de la logique mathématique [1961], de la théorie des superstructures sur les ultrapuissances [1962] ou de la théorie axiomatique des ensembles [1977] utilisés dans d'autres approches.

Toutes les versions de l'analyse non standard relient les nombres standard à d'autres de la même manière en un sens que des nombres tels $1/7$ ou π utilisés dans des calculs exacts ou littéraux sont reliés à des nombres tels 0,142 857 et 3,141 59 utilisés dans des calculs numériques approchés. Bien que les entiers non standard soient trop grands pour être déterminés de manière unique, chacun possède un développement décimal comprenant un nombre non standard de chiffres et des étudiants pourraient effectuer des calculs en somme de la même manière qu'ils effectuent des calculs avec des entiers standards, sans référence à une quelconque théorie formelle ; par exemple $(312 \ldots 231)^2 = 97 \ldots 361$. Tout entier positif non standard est supérieur à tous les entiers standards et vérifie les propriétés usuelles des entiers standards ; par exemple tout entier positif non standard se décompose en un produit de nombres premiers et est la somme de quatre carrés. Certains mathématiciens utilisent la théorie I.S.T. (*Internal Set Theory*) d'Edward Nelson [1977] pour considérer les entiers standard et non standard comme étant tous finis et donc membres de l'anneau ordonné $\mathbf{Z}$ des entiers finis. D'autres utilisent une théorie des ensembles plus traditionnelle pour considérer les entiers non standards en tant que nombres n'étant ni finis ni membres de $\mathbf{Z}$.

Pour combiner certains aspects intéressants de ces deux points de vue, nous introduirons l'idée suivant laquelle les entiers non standard sont des hôtes de $\mathbf{Z}$ plutôt que des éléments non standard et que ces entiers, leurs inverses et certains autres nombres non standard sont des hôtes du corps ordonné $\mathbf{R}$ des nombres réels. Nous identifierons les hôtes de $\mathbf{R}$ avec certains des nombres définis par J. H. Conway [1976] et nous représenterons ces nombres en tant que points d'une droite numérique.

1 Nombres surréels

Nous identifions les nombres $0, 1, 2\ldots$ aux ordinaux finis, aux entiers non négatifs et aux entiers naturels. Les enfants apprennent à faire des calculs sur ces nombres et d'autres nombres réels bien avant d'étudier les axiomes des corps ordonnés ou des constructions de $\mathbf{R}$ utilisant les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy. De même nous pouvons apprendre à faire des calculs avec d'autres nombres avant d'étudier des axiomes ou des constructions les concernant. En particulier, les opérations usuelles d'addition et de multiplication sur les ordinaux finis se prolongent naturellement aux ordinaux infinis de telle manière que tout ensemble d'ordinaux engendre un corps. Les différences d'ordinaux sont une généralisation des entiers et les quotients de ces différences sont une généralisation des rationnels ; par exemple en soustrayant 1 du plus petit ordinal infini ω on obtient l'entier généralisé $\omega - 1$ qui n'est pas un ordinal et en divisant 1 par ω on obtient le rationnel généralisé $1/\omega$ qui est strictement positif et plus petit que tout nombre réel strictement positif. Plutôt que d'utiliser des constructions différentes pour les entiers, les rationnels et les autres réels, J. H. Conway [1976] a trouvé une construction unique pour tout ces nombres et d'autres, lesquels ont été baptisés «surréels» par Donald Knuth [1974]. Harry Gonshor [1986] a identifié les nombres surréels aux listes finies et infinies formées avec deux symboles. Les seules propriétés des nombres surréels que nous utiliserons ici sont :

- Tous les réels et tous les ordinaux sont des surréels.
- L'addition et la multiplication naturelle des réels et des ordinaux se prolonge aux surréels ; et muni de ces opérations, tout ensemble de surréels engendre un corps ordonné de nombres surréels.
- Tout corps ordonné étendant $\mathbf{R}$ est isomorphe à une extension surréelle de $\mathbf{R}$.

Un exemple de corps ordonné étendant $\mathbf{R}$ consiste en l'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle des fonctions et ordonné par la relation définie par $f < g$ ssi il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) < g(x)$ pour tout $x > a$. Cette extension est isomorphe au corps ordonné $\mathbf{R}(\omega)$ des surréels engendrés par ω.

Définitions

Un nombre surréel x est :

- *ω-petit* ssi $-1 < nx < 1$ pour tout ordinal $n < \omega$,
- *ω-grand* ssi x a un inverse $1/x$ qui est ω-petit, et
- *ω-proche* d'un nombre surréel y ssi $x - y$ est ω-petit.

Aucun réel n'est ω-grand, l'ordinal 0 est le seul réel ω-petit, un ordinal est ω-grand ssi il est infini et un surréel est ω-grand ssi il n'est pas compris entre deux réels. Aucun réel n'est ω-proche d'un autre, tout nombre surréel est ω-proche d'au plus un réel et un surréel est ω-grand ssi il n'est ω-proche d'aucun réel. Un surréel est ω-proche d'un réel ssi aucun autre réel est situé entre eux et un surréel est ω-proche d'un réel non nul ssi leur quotient est ω-proche du nombre réel 1.

2 *Réels

Nous admettrons que toute suite de nombres réels (s_n) admet un *label surréel s_* vérifiant les axiomes suivants :

Axiomes

- Si $r_n + s_n = t_n$ pour tout entier naturel n alors $r_* + s_* = t_*$.
- Si $r_n \cdot s_n = t_n$ pour tout entier naturel n alors $r_* \cdot s_* = t_*$.
- Si $s_n = x \in \mathbf{R}$ pour tout entier naturel n alors $s_* = x$.
- Si $s_n = n$ pour tout entier naturel n alors s_* est ω-grand.

Voici quelques conséquences de ces axiomes :

- Des suites ayant des *labels différents, diffèrent par une infinité de termes.
- Des suites convergeant vers $x \in \mathbf{R}$ ont des *labels ω-proches de x.
- Des suites ayant des *labels ω-proches de $x \in \mathbf{R}$ tendent vers x.
- Des suites formées de 0 ou de 1 ont pour *label soit 0, soit 1.
- Les suites formées de 0 ou de 1 ayant pour *label 1 sont les suites caractéristiques des éléments d'un ultrafiltre non trivial sur l'ensemble des entiers naturels.
- L'application qui à toute suite de réels associe son *label surréel est un homomorphisme d'anneaux de l'anneau des suites réelles vers un corps de nombres surréels étendant $\mathbf{R}$.

Définitions

Un nombre surréel est :

- un **éléments* de $X \subset \mathbf{R}$ ssi il est égal à s_* pour une suite s dans X ;
- un *hôte* de $X \subset \mathbf{R}$ ssi il est un *élément et pas un élément de X ; et
- un **réel* ssi il est un *élément de $\mathbf{R}$.

Tous les réels sont des *réels, tout les éléments de $X \subset \mathbf{R}$ sont des *éléments de X et un *élément de X est un élément de X ssi il est réel. Une partie de $\mathbf{R}$ possède des hôtes ssi elle possède une infinité d'éléments et deux parties de possèdent des hôtes différents ssi elles diffèrent d'une infinité d'éléments. Tout hôte de $\mathbf{R}$ est hôte d'au plus une partie pour toute partition de $\mathbf{R}$ et une partition de $\mathbf{R}$ est finie ssi tous les hôtes de $\mathbf{R}$ sont hôtes d'un élément de la partition.

Un sous-ensemble $X \subset \mathbf{R}$ est :

- discret ssi aucun hôte de X n'est ω-proche d'un élément de X,
- un voisinage de $x \in X$ ssi aucun élément du complément X' de X dans $\mathbf{R}$ n'est ω-proche de x,
- ouvert ssi aucun hôte de X' n'est ω-proche d'un élément de X,
- fermé ssi aucun hôte de X n'est ω-proche d'un élément de X',
- compact ssi tout hôte de X est ω-proche d'un élément de X, et
- parfait ssi pour chaque élément de X il existe des hôtes de X qui sont ω-proches et si aucun hôte de X n'est ω-proche d'éléments de X'.

3 Continuité et Dérivabilité

Définitions

- La *composée* de la suite s à valeurs dans X avec l'application $f : X \to Y$ est la suite notée $f \circ s$ à valeurs dans Y telle que $(f \circ s)_n = f(s_n)$ pour tout entier naturel n.
- L'application $f : X \to Y$ admet pour **valeur* y pour x *élément de X ssi pour toute suite s à valeurs dans X, si $x = s_*$ alors $y = (f \circ s)_*$.

Toute application entre deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$ a exactement une *valeur pour tout *élément de son domaine de définition. Il n'y a pas d'ambiguïté à utiliser «$f(x)$» pour noter à la fois la valeur et la *valeur de f en x, puisqu'elles sont égales dès lors qu'elles sont toutes les deux définies. Toutes les *valeurs de $f : X \to Y$ sont des *éléments de Y et $f(x)$ est un hôte de Y ssi x est un hôte de X et d'aucune courbe de niveau de f dans X. Des fonctions ayant pour domaine de définition $X \subset \mathbf{R}$ ont la même *valeur pour un hôte x de X ssi elles ont la même restriction pour un sous-ensemble de X ayant pour hôte x.

Une partie X de $\mathbf{R}$ est un voisinage de $x \in X$ ssi $x + \Delta x$ est un *élément de X pour tout hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$.

Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$, où X est un voisinage de x, est

- bornée sur un voisinage de x ssi Δf $(= f(x + \Delta x) - f(x))$ n'est ω-grand pour aucun hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$,
- continue en x ssi Δf est ω-petit pour tout hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$,
- lipschitzienne en x ssi $\Delta f / \Delta x$ n'est ω-grand pour aucun hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$,
- dérivable en x avec pour dérivée $f'(x) \in \mathbf{R}$ ssi $\Delta f / \Delta x$ est ω-proche de $f'(x)$ pour tout hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$, et
- constante sur un voisinage de x ssi $\Delta f = 0$ pour tout hôte ω-petit Δx de $\mathbf{R}$.

Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$, où X est un ouvert de $\mathbf{R}$, est continue sans être uniformément continue ssi pour tout hôte ω-petit Δx, $\Delta f(x, \Delta x)$ est ω-petit pour tout élément x de X et ne l'est pas pour certains hôtes x de X. Par exemple, la fonction carrée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue sans être uniformément continue car pour tout hôte ω-petit Δx, $\Delta(x^2) = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ est ω-petit pour tout $x \in \mathbf{R}$ mais pas pour certains hôtes ω-grand x de $\mathbf{R}$.

4 Principes de Transfert

Les théorèmes concernant les réels et les ensembles finis de réels se généralisent en théorèmes concernant les *réels et les ensembles finis de *réels ; par exemple, un *réel est positif ou nul ssi il est le carré d'un *réel, et tout polynôme de degré impair à coefficients *réels a une racine *réelle. Pour généraliser les théorèmes portants sur des ensembles infinis de réels, nous allons associer un *label X_* à certaines suites d'ensembles non vides X_n.

Axiome

Si toute suite à valeurs dans l'ensemble X admet un *label, alors toute suite (X_n) de sous-ensembles non vides de X admet un *label

$$X_* = \{s_* \mid \forall n \in \mathbf{N},\, s_n \in X_n\}.$$

Définitions

- L'ensemble X produit un *standard* ${}^*X$ ssi toute suite à valeurs dans X a un *label et ${}^*X$ est l'ensemble des *labels des suites à valeurs dans X.
- Un sous-ensemble d'un standard ${}^*X$ est interne ssi il est le *label d'une suite de sous-ensembles X_n de X.

Le corps ordonné $\mathbf{R}$ produit le standard ${}^*\mathbf{R}$, corps ordonné formé des éléments et des hôtes de $\mathbf{R}$. Si un ensemble X produit un standard ${}^*X$, alors il en est de même de l'ensemble $\wp(X)$ des parties de X, avec ${}^*(\wp(X)) \subset \wp({}^*X)$. Ordonnés par l'inclusion, les sous-ensembles standards de ${}^*X$ forment une sous-algèbre booléenne de l'algèbre booléenne ${}^*(\wp(X))$ des sous-ensembles internes, qui à son tour est une sous-algèbre booléenne de l'algèbre booléenne $\wp(^*X)$ des sous-ensembles de $^*X$; $^*(\wp(X)) = \wp(^*X)$ ssi X est fini. Si les ensembles X et Y produisent les standards $^*X$ et $^*Y$ sous-ensembles d'un standard, alors il en est de même de $X \cup Y$ et de $X \cap Y$; avec $^*(X \cup Y) =^* X \cup^* Y$ et $^*(X \cap Y) =^* X \cap^* Y$.

Les théorèmes concernant les réels et les ensembles de réels se généralisent en théorèmes concernant les *réels et les ensembles internes de *réels, à condition que chaque ensemble spécifié soit remplacé par son standard ; par exemple, puisque tout sous-ensemble non vide de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels a un plus petit élément, alors tout sous-ensemble interne non vide de l'ensemble $^*\mathbf{N}$ a un plus petit élément, même si certains sous-ensembles non internes, comme l'ensemble des hôtes de $\mathbf{N}$, n'ont pas de plus petit élément.

5 Références

[1934] Thoralf Skolem, Fundamenta Mathematicæ, **23**, 150-161

[1961] Abraham Robinson, Proc. Royal Academy of Amsterdam, ser. A, **64**, 432-440

[1962] W.A.J. Luxemburg, Bull. of the American Mathematical Society, ser. 2, **68**, 416-419

[1973] cité page x de Abraham Robinson, *Nonstandard Analysis*, North Holland

[1974] Donald E. Knuth, *Surreal Numbers*, Addison-Wesley

[1976] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press

[1977] Edward Nelson, Bull. of the American Mathematical Society, **83**, 1165-1198

[1986] Harry Gonshor, *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, Cambridge Univ. Press

[1988] Nigel Cutland, *Nonstandard Analysis and its Applications*, London Mathematical Society